Глава 1. Кольца

Задание №1

Дано: a1 = 141, b1 = 103, c1 = 254, R = Z300, n = 588, a2 = 39, b2 = 463, c2 = 454,

a3 = 1, b3 = 2, c3 = 22. ⇒

Найти: а) Найдите компоненты элементов a1, b1, c1 кольца R.

b) Постройте изоморфизм f: Z/n → … как в следствии к теореме 32.

1) Найдите f(a2), f(b2), f(c2).

2) Найдите f-1((a3), (b3), (c3)).

Решение:

а) |R| имеет следующий вид канонического разложения ⇒ .

Следовательно, компоненту произвольного элемента можно найти следующим образом .

Получаем, что m1 = 75, m2 = 100, m3 = 12. Необходимо решить уравнение

, ⇒

Компоненты элемента a1 = 141:

Компоненты элемента b1 = 103:

Компоненты элемента c1 = 254:

b) Рассмотрим разложение n, получаем, что n = . Видим, что канонические разложение числа n подходит по условию следствия теоремы 32. Значит, имеет место изоморфизм колец

1) f(a2) = (1, 0, 39); f(b2) = (1, 1, 22); f(c2) = (0, 1, 13).

2) f-1((a3), (b3), (c3)) = f-1(1, 2, 40).

По КТО данная система имеет единственное решение.

Получаем, что решением этой системы является x = [89]294 ⇒ f-1(1, 2, 40) = 89.

Задание №3

Дано: R1 = N, R2 =

Найти: являются ли R1, R2 полями или кольцами (выполняется ли коммутативность, есть ли единица, какие элементы не обратимы)? Если да, то в R1, R2 найти (не менее 3, если возможно) собственные идеалы и (не менее 3, если возможно) собственные подкольца, не являющиеся идеалами (если идеалы и такие подкольца существуют). Являются ли данные кольца кольцами главных идеалом?

Решение:

I) R1 = N является известной алгебраической структурой и не является ни полем, ни кольцом.

II) R2 =

1. Коммутативность по операции «+» является очевидным фактом.

2. Ассоциативность по операции «+» является очевидным фактом.

3. Коммутативность по операции «» является очевидным фактом.

4. Ассоциативность по операции «»: ; ⇒ верно. Следовательно, ассоциативность выполняется.

5. Существование противоположного элемента по операции «+»:

– верно ⇒ существование выполняется.

6. Существование нейтрального элемента по операции «+»:

– верно ⇒ существование выполняется.

7. Дистрибутивность: – верно, следовательно выполнена дистрибутивность слева.

– верно, следовательно выполнена дистрибутивность справа.

8. Существование единицы:

– верно, следовательно существует единица e = .

9. Обратного элемента не существует.

Получаем, что R2 является коммутативным кольцом с единицей, следовательно, идеал кольца имеет вид , но так как не выполняется условие идеала то R2 не имеет собственных идеалов, но имеет собственные подкольца вида mR2, где .

Задача №4

Если идеал I содержит обратимый элемент, то I = R. Таким образом, собственный идеал содержит только необратимые элементы кольца.

Доказательство:

По определению идеала . Если .

Задача №5

Дано: – гомоморфизм.

Доказать:

Доказательство:

Пусть . Тогда для любых h и справедливы соотношения и и . Следовательно,

и .