Глава 1. Кольца

Задание №1

Дано: a1 = 141, b1 = 103, c1 = 254, R = Z300, n = 588, a2 = 39, b2 = 463, c2 = 454,

a3 = 1, b3 = 2, c3 = 22. ⇒

Найти: а) Найдите компоненты элементов a1, b1, c1 кольца R.

b) Постройте изоморфизм f: Z/n → … как в следствии к теореме 32.

1) Найдите f(a2), f(b2), f(c2).

2) Найдите f-1((a3), (b3), (c3)).

Решение:

а) |R| имеет следующий вид канонического разложения ⇒ .

Следовательно, компоненту произвольного элемента можно найти следующим образом .

Получаем, что m1 = 75, m2 = 100, m3 = 12. Необходимо решить уравнение

, ⇒

Компоненты элемента a1 = 141:

Компоненты элемента b1 = 103:

Компоненты элемента c1 = 254:

b) Рассмотрим разложение n, получаем, что n = . Видим, что канонические разложение числа n подходит по условию следствия теоремы 32. Значит, имеет место изоморфизм колец

1) f(a2) = (1, 0, 39); f(b2) = (1, 1, 22); f(c2) = (0, 1, 13).

2) f-1((a3), (b3), (c3)) = f-1(1, 2, 40).

По КТО данная система имеет единственное решение.

Получаем, что решением этой системы является x = [89]294 ⇒ f-1(1, 2, 40) = 89.

Задание №2

Дано:

Найти: построить факторкольца Определить являются ли они полями. Если факторкольца конечны, то выписать таблицы Кэли, если бесконечны, то описать элементы факторколец. Указать делители нуля и обратимые элементы (с обратными элементами).

Решение:

1) Кольцо является полем в том и только том случае, когда многочлен f(x) не приводим над поле P. В случае многочлена получаем, что – приводимый многочлен, так как имеет разложение и его корни лежат в поле P ⇒ . Получаем, что факторкольцо – кольцо.

Опишем элементы кольца:

где a, b R.

Найдем обратные элементы:

Обозначим элементы . Предположим, что

произведем деление многочлена по mod . Получаем, что

Составим систему для нахождения элементов C и D:

Получаем, что обратные элементы имеют вид: .

Делители нуля:

2) Кольцо является полем в том и только том случае, когда многочлен f(x) не приводим над поле P. В случае многочлена получаем, что – неприводимый многочлен, так как не имеет разложение, следовательно – поле.

Опишем элементы поля:

где a R.

Обратные элементы: , где a R.

Делителей нуля в поле не существует.

Задание №3

Дано: R1 = N, R2 =

Найти: являются ли R1, R2 полями или кольцами (выполняется ли коммутативность, есть ли единица, какие элементы не обратимы)? Если да, то в R1, R2 найти (не менее 3, если возможно) собственные идеалы и (не менее 3, если возможно) собственные подкольца, не являющиеся идеалами (если идеалы и такие подкольца существуют). Являются ли данные кольца кольцами главных идеалом?

Решение:

I) R1 = N является известной алгебраической структурой и не является ни полем, ни кольцом.

II) R2 =

1. Коммутативность по операции «+» является очевидным фактом.

2. Ассоциативность по операции «+» является очевидным фактом.

3. Коммутативность по операции «» является очевидным фактом.

4. Ассоциативность по операции «»: ; ⇒ верно. Следовательно, ассоциативность выполняется.

5. Существование противоположного элемента по операции «+»:

– верно ⇒ существование выполняется.

6. Существование нейтрального элемента по операции «+»:

– верно ⇒ существование выполняется.

7. Дистрибутивность: – верно, следовательно выполнена дистрибутивность слева.

– верно, следовательно выполнена дистрибутивность справа.

8. Существование единицы:

– верно, следовательно существует единица e = .

9. Обратного элемента не существует.

Получаем, что R2 является коммутативным кольцом с единицей, следовательно, идеал кольца имеет вид , но так как не выполняется условие идеала то R2 не имеет собственных идеалов, но имеет собственные подкольца вида mR2, где .

Задача №4

Если идеал I содержит обратимый элемент, то I = R. Таким образом, собственный идеал содержит только необратимые элементы кольца.

Доказательство:

По определению идеала . Если .

Задача №5

Дано: – гомоморфизм.

Доказать:

Доказательство:

Пусть . Тогда для любых h и справедливы соотношения и и . Следовательно,

и .

Глава 2

Задача №1

Дано: a = 2*i*, P = R, b = y2 + 1, T =

Найти: , где H – простое подполе поля T.

Решение:

1) По определению минимального многочлена получаем, что в R:

2) Простым подполем поля T является многочлены нулевой степени, что в свою очередь является изоморфизмом:

Получаем, что минимальный многочлен будет выглядеть следующим образом: , где .

Рассмотрим коэффициенты :

a = y2 + 1,

a2 = y,

a3 = y3 + y,

a4 = y2.

Получаем, что коэффициент a и a4 совпадают. Составим минимальный многочлен из данных коэффициентов:

Многочлен f(x) является неприводимым в H, а его корнем является aб и многочлен меньшей степени, для которого a был бы корнем, построить нельзя, а это значит, что

Задание №2

Дано: f(x) = x2 – 5, P = .

Найти: 1. Найти минимальное поле разложение T многочлена .

2. Разложить над полем T.

3. Найти .

Решение:

1) В любом поле и для любого многочлена существует поле разложения P´. Корни многочлена . Тогда по определению минимального поля разложения является минимальным полем разложения.

2) Разложение многочлена над полем T: .

3) Для того, чтобы найти степень расширения, необходимо найти минимальный многочлен , где *α* = . По определению минимального многочлена получаем, что – минимальный многочлен. Следовательно, , где T =,

Задача №4

Дано: P = Z5, k = 23.

Найти: Постройте неприводимый многочлен над P степени k.

Решение:

Воспользуемся теоремой Эйзенштейна, тогда многочлен:

Выполняются следующие условия, где :

Пусть p = 3, тогда:

Получаем, что неприводимый многочлен 23 степени имеет вид:

Глава 3

Задача №1

Дано: u=2,1,1,6,2,1,0,2,4,1,1,5,5,3,0,3,0,2,3,4,3,5,6,6,1,5,6,0,5,3,6,6,2,2,4,0,4,0,5,4,3,4,2,1,1,6,2,1,0,2,4,1,1,5,5,3 ,0,3,0,2,3,4,3,5,6,6,1,5,6,0,5,3,6,6,2,2,4,0,4,0,5,4,3…

Найти:

1. Определите над каким полем последовательность u. Является ли последовательность u ЛРП? Если да, то каков её характеристический многочлен минимальной степени, общий член u(i), а также Ann(u).

2. Если последовательность ЛРП, то является ли она периодической? o Если да, то вычислите период и длину подхода ЛРП?

Решение:

1. Последовательность u построена над поле , поскольку встречаются только 7 элементов (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Также последовательность u является ЛРП, так как ее можно представить в следующем виде:

Характеристический многочлен последовательности:

Докажем, что F(x) является минимальным многочленом.

, получаем, что F(x) является характеристическим многочленом минимальной степени.

Известно, что , где v – последовательность, исходя и определения аннулятора, получаем, что v – нулевая последовательность, где минимальным многочленом является

Получаем, что .

2. Последовательность u является периодической, так как выполняется следующее условие:

Получаем, что последовательность u периодическая. Период T(u) = 42, а длина подхода Λ(u) = 0.

Задача №2

Дано: P = , , , *i* =329,

*j* = 1031.

Найти:

1. u(i), u(i+1), u(i+2),…,u(i+n);
2. u(j), u(j+1), u(j+2),…,u(j+n);

Решение:

Многочлен f[x] раскладывается на множители

Получаем, что общий член u(*i*) имеет следующий вид:

Составим уравнение для определения коэффициентов *an*:

Найдем следующие элементы последовательности:



Задача №3

Дано:

Найти:

1. Постройте импульсную последовательность с характеристическим многочленом f(x) до первого «повтора».
2. Выпишите длину подхода и периода импульсной последовательности.
3. Найдите период многочлена f(x) и дефект подхода.
4. Является ли f(x) многочленом максимального периода?
5. Является ли f(x) реверсивным многочленом?
6. Выпишете последовательности u, с характеристическим многочленом f(x) до первого «повтора».
7. Выпишите длину подхода и периода последовательности u.

Решение:

1. v[] = (0, 1) – импульсная последовательность. Используя многочлен, получаем следующую последовательность:

2. Последовательность v является периодической, так как выполняется следующее условие:

Длина подхода Λ(v) = 0 и период T(v) = 6 импульсной последовательности v.

3. Унитарный многочлен F(x) R[x] является периодическим тогда и только тогда, когда периодична последовательность v ⇒ F(x) – периодический многочлен, тогда Λ(v) = Λ(F), T(v) = T(F) ⇒ Λ(F) = 0, T(F) = 6.

Проведем проверку, используя определение периодического многочлена:

Получаем, что период многочлена T(F) = 6 и дефект многочлена Λ(F) = 0.

4. Скорее всего нет, так как Z8 не поле.

5. F(x) – реверсивный многочлен, так как выполняется следующее условие:

6. Используя многочлен, получаем следующую последовательность:

7. Последовательность u является периодической, так как выполняется следующее условие:

Длина подхода Λ(u) = 0 и период T(u) = 6 импульсной последовательности u.